Çözüm: Önce $\mathbb{N}$ kümesinin üstten sınırsız olduğunu, yani $\mathbb{N}$ nin (h) özelliğinin doğruluğunu görelim. Olmayana ergi yöntemine göre eğer, $\mathbb{N}$ üstten sınırlı bir küme ise $\max \mathbb{N} = n$ elemanı mevcuttur. Fakat, $n + 1 \in \mathbb{N}$ ve $n + 1 > n$ dir. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ üstten sınırsız olduğundan $\mathbb{Z}$ de üstten sınırsızdır. $\diamond$

(3) **(a)** α rasyonel, β irrasyonel olduğunda $\alpha - \beta$ ve $\alpha + \beta$ sayılarının irrasyonel olacağını gösteriniz.
(b) α sıfırdan farklı rasyonel ve β irrasyonel ise $\alpha.\beta$ ve α/β sayılarının irrasyonel olacağını gösteriniz.

Çözüm: **(b)** önermesinin doğru olduğunu görelim. $\alpha.\beta$ bir irrasyonel sayıdır. Gerçekten, eğer $\alpha.\beta = r \in \mathbb{Q}$ ise iki rasyonel sayının oranı da rasyonel bir sayı olduğundan $\beta = \dfrac{r}{\alpha} \in \mathbb{Q}$ olur. Bu ise β nın irrasyonel bir sayı olması ile çelişir. $\dfrac{\alpha}{\beta}$ nın da irrasyonel bir sayı olduğu benzer şekilde gösterilir. $\diamond$

(4) $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayaılar olmak üzere $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ polinom denklemi verilsin. Eğer, denklemin p/q şeklinde rasyonel bir kökü varsa a_n, p ile a_0 da q ile tam olarak bölünebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: p/q sayısı bir kök olduğundan, bunu verilen denklemde yerine koyarsak ve her iki tarafı q^n ile çarparsak

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0 \tag{1.3}$$

elde edilir ve denklemi p ile bölersek

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + a_2p^{n-3}q^2 + \ldots + a_{n-2}q^{n-1} = -\frac{a_nq^n}{p} \tag{1.4}$$

denklemini elde ederiz. (1.4) ün sol tarafı tam sayı olduğundan sağ tarafı da tam sayı olmak zorundadır. p ve q asal sayılar olduğundan p, q^n ni tam olarak bölemez. Dolayısıyla, a_n ni bölmek zorundadır.

Benzer şekilde, (1.3) denkleminin her iki tarafını q ile bölmek suretiyle a_0 ın q ya bölünmesi zorunluluğunu da gösterebiliriz. $\diamond$

(5) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ in bir rasyonel sayı olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $x = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ dersek, $x^2 = 8+2\sqrt{15}$, $x^2-8 = 2\sqrt{15}$ ve $x^4-16x^2+4 = 0$ denklemini elde ederiz. Problem (4)'e göre bu denklemin muhtemel rasyonel kökleri ± 2 ve ± 4 sayıları olabilir. Fakat, bu sayıların hiçbiri verilen denklemi sağlamadığından $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ sayısı rasyonel bir sayı değildir. $\diamond$

(6) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$'ün cebirsel bir sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x = \sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ dersek, $x-\sqrt{2} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow x^3+6x-3 = \sqrt{2}(3x^2+2) \Rightarrow (x^3+6x-3)^2 = 2(3x^2+2)^2 \Rightarrow x^6-24x^4-6x^3-12x^2-36x-7 = 0$ elde ederiz. Bu ise katsayıları tam sayılar olan polinom bir denklem olduğundan, bu denklemin bir kökü olan $x = \sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ cebirsel bir sayıdır. $\diamond$

(7) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y^n = x$ olacak şekilde tek bir $y = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$ sayısının varlığını gösteriniz.

Çözüm: Teklik aşikardır. Gerçekten, $y^n = x$ olacak şekilde iki tane $y_1 \in \mathbb{R}_+$ ve $y_2 \in \mathbb{R}_+$ sayılarının varolduğunu farzedelim. Eğer, $0 < y_1 < y_2$ (veya $0 < y_2 < y_1$) ise $y_1^n < y_2^n$ olur ve bu sonuç $y_1^n = x$, $y_2^n = x$ hipotezi ile bir çelişme teşkil ettiğinden $y_1 = y_2$ dir.

$$X = \{t \in \mathbb{R}_+ : \ t^n < x\}$$

kümesini gözönüne alalım. Eğer, $t = x/(x+1)$ ise $0 < t < 1$ ve $t^n \leq t < x$ dir. Buradan da $t \in X$ olur. Dolayısıyla, X, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan bir alt kümesidir.

$t_0 = 1+x$ olsun. Eğer, $t > t_0$ ise $t > 1$ ve $t^n > t > x$ dir. Yani, $t \notin X$ dir. Buna göre, t_0, X kümesinin bir üst sınırıdır. Bundan dolayı X, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan üstten sınırlı bir alt kümesi olduğundan üst sınır prensibine göre (Bkz. Teorem 1.7.4) $y = \sup X$ vardır. $y^n = x$ olduğunu görelim.

(a) $y^n < x$ olamaz. Gerçekten, $0 < h < 1$ ve

$$h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir h sayısı seçilsin. Newton Binom Formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
(y+h)^n &= y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} h + \binom{n}{2} y^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n \\
&= y^n + h\Big[\binom{n}{1} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}\Big] \\
&< y^n + h\Big[\binom{n}{1} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\Big] \\
&= y^n + h\big[(1+y)^n - y^n\big] < y^n + (x - y^n) = x
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $(y+h)^n < x$ olduğundan $y + h \in X$ olur. Bu ise $y = \sup X$ olması ile bir çelişme teşkil eder.

(b) $y^n > x$ olamaz. Gerçekten, $0 < k < 1$, $k < y$ ve

$$k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir k sayısı seçilsin. Bu durumda, $t \geq y - k$ ise

$$\begin{aligned}
t^n \geq (y-k)^n &= y^n - \binom{n}{1} y^{n-1} k + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} k^n \\
&= y^n - k\Big[\binom{n}{1} y^{n-1} - \binom{n}{2} y^{n-2} k + \ldots - (-1)^n \binom{n}{n} k^{n-1}\Big] \\
&\geq y^n - k\Big[\binom{n}{1} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\Big] \\
&= y^n - k\big[(1+y)^n - y^n\big] > y^n - (y^n - x) = x
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $(y-k)^n > x$ olduğundan $y - k$, X in bir üst sınırıdır. Bu durum $y = \sup X$ olması ile bir çelişme teşkil eder.

Demek ki, $y^n = x$ dir. $\diamond$

(8) $\forall n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu Matematik İndüksiyon yöntemi ile gösteriniz.

(a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

(b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}.n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$;

(c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\ldots(k+p-1) = \dfrac{1}{p+1}n(n+1)\ldots(n+p),\ p = 2, 3, \ldots$;

(d) $3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{n-kez} = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$;

(e) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right)$;

(f) $1.(5) + 2.(5)^2 + 3.(5)^3 + \ldots + n.(5)^n = \dfrac{5 + (4n-1)5^{n+1}}{16}$;

(g) $a + a.r + a.r^2 + \ldots + a.r^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}, \quad r \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Çözüm: Eşitliklerin sol tarafının $D(n)$, sağ tarafının ise $G(n)$ ile gösterildiğini, yani önermelerin $D(n) = G(n),\ n \in \mathbb{N}$ biçiminde verildiğini farzedeceğiz.

(a) $1^2 = \dfrac{1.(4.1^2 - 1)}{3} = 1$ olduğundan $D(1) = G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. O halde,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{n(4k^2-1)}{3}$$

geçerlidir. Her iki tarafa $(2k+1)^2$ yi ilave edersek

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 &= \frac{n(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 \\ &= \frac{4k^3 - k + 12k^2 + 12k + 3}{3} \\ &= \frac{4(k+1)^3 - k - 1}{3} \\ &= \frac{(k+1)[4(k+1)^2 - 1]}{3} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.
(b) $1^2 = (-1)^{1-1}.\dfrac{1.(1+1)}{2} = 1$ olduğundan $D(1) = G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1}.k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$$

geçerlidir. Her iki tarafa $(-1)^k(k+1)^2$ ilave edersek

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots &+ (-1)^{k-1}.k^2 + (-1)^k(k+1)^2 \\ &= (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 \\ &= (-1)^k\big[(k+1)^2 - \frac{k(k+1)}{2}\big] \\ &= (-1)^k\frac{k^2+3k+2}{2} = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.
(c) $1(1+1)(1+2)\ldots(1+p-1) = \dfrac{1}{p+1}1.(1+1)(1+2)\ldots(1+p-1)(1+p)$ olduğundan her $p = 2, 3, \ldots$ için $D(1) = G(1)$ doğrudur. Farzedelim ki, $D_n = G_n$ ifadesi $n = m$ için doğrudur. Bu durumda, her $p = 2, 3, \ldots$için

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2)\ldots(k+p-1) = \frac{1}{p+1}m(m+1)\ldots(m+p)$$

geçerlidir. Her iki tarafa $(m+1)(m+2)\ldots(m+p)$ ilave edersek

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)(k+2)\ldots(k+p-1) + (m+1)(m+2)\ldots(m+p) \\ = \frac{1}{p+1}m(m+1)\ldots(m+p) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(m+1)(m+2)\dots(m+p)\\
&=(m+1)(m+2)\dots(m+p)\left[\frac{m}{p+1}+1\right]\\
&=\frac{1}{p+1}(m+1)(m+2)\dots(m+p)(m+1+p)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise her $p=2,3,\dots$ için $D(k+1)=G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, her $p=2,3,\dots$ için $D(n)=G(n)$ bağıntısı tüm $n\in\mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.

(d) $3=\dfrac{10^{1+1}-9.1-10}{27}=\dfrac{81}{27}=3$ olduğundan $D(1)=G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n)=G(n)$ ifadesi $n=k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$3+33+333+\dots+\underbrace{33\dots3}_{k-kez}=\frac{10^{k+1}-9k-10}{27}$$

geçerlidir. Her iki tarafa $\underbrace{33\dots33}_{k+1-kez}$' ü ilave edrsek

$$
\begin{aligned}
3+33+333+\dots+\underbrace{33\dots3}_{n-kez}+\underbrace{33\dots33}_{k+1-kez}\\
=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}+\underbrace{3.3.\dots3.3}_{k+1-kez}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Öte yandan

$$
\begin{aligned}
\underbrace{33\dots33}_{k+1-kez}&=3.10^{k}+3.10^{k-1}+\dots+3.10+3.10^{0}\\
&=3(10k+10^{k-1}+\dots+10+10^{0})=3.\frac{10^{k+1}-1}{10-1}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\frac{10^{k+1}-9k-10}{27}+\underbrace{33\dots33}_{k+1-kez}&=\frac{10^{k+1}-9k-10+9.10^{k+1}-9}{27}\\
&=\frac{10^{k+2}-9(k+1)-10}{27}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla, $D(k) = G(k)$ ise $D(k+1) = G(k+1)$ olduğu görülür. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.

(e) $\sqrt{2} = 2\cos(\pi/2^{1+1}) = 2\cos(\pi/4)$ olduğundan $D(1) = G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda, $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = 2\cos\left(\pi/2^{k+1}\right)$ geçerlidir. Buradan da

$$\begin{aligned} D(k+1) &= \sqrt{2+D(k)} = \sqrt{2+2\cos\left(\pi/2^{k+1}\right)} \\ &= \sqrt{2+2\cos\left(2.\pi/2^{k+2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\pi/2^{k+2}\right)} \\ &= 2\cos\left(\pi/2^{k+2}\right) = G(k+1) \end{aligned}$$

elde edlir. Bu ise, $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.

(f) $1.(5) = \dfrac{5+(4.1-1)5^{1+1}}{16} = 5$ olduğundan $D(1) = G(1)$ dir. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$1.(5) + 2.(5)^2 + 3.(5)^3 + \ldots + k.(5)^k = \frac{5+(4k-1)5^{k+1}}{16}$$

geçerlidir. Her iki tarafa $(k+1).(5)^{k+1}$ ilave edersek

$$\begin{aligned} 1.(5) + 2.(5)^2 + 3.(5)^3 + \ldots + k.(5)^k + (k+1).(5)^{k+1} \\ &= \frac{5+(4k-1)5^{k+1}}{16} + (k+1).(5)^{k+1} \\ &= \frac{5+20k5^{k+1}+15.5^{k+1}}{16} = \frac{5+[4(k+1)-1]5^{k+2}}{16} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.

(g) $a = \dfrac{a(r^1-1)}{r-1} = a$ olduğundan $D(1) = G(1)$ dir. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$a + a.r + a.r^2 + \ldots + a.r^{k-1} = \frac{a(r^k-1)}{r-1}$$

geçerlidir. Her iki tarafa ar^k yı ilave edersek

$$\begin{aligned} a + a.r + a.r^2 + \ldots + a.r^{k-1} + ar^k &= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k \\ &= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur. $\diamond$

(9) Matematik indüksiyon metodu ile aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$ için $n^{n+1} > (n+1)^n$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ için $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$;

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2!.4! \ldots (2n)! \geq [(n+1)!]^n$;

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$;

(e) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\cdots.\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

Çözüm: Eşitsizliklerin sol tarafını $D(n)$, sağtarafını ise $G(n)$ ile gösterildiğini farzedelim.
(a) $3^{3+1} > (3+1)^3$ olduğundan $D(3) = G(3)$ tür. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$k^{k+1} > (k+1)^k \tag{1.5}$$

geçerlidir. $n = k + 1$ için bu eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim. (1.5) eşitsizliğinin her iki tarafını $\dfrac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} (k+1)^{k+2} > \frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{k+1}} &= \Big(\frac{k^2 + 2k + 1}{k}\Big)^{k+1} \\ &= (k + 2 + \frac{1}{k})^{k+1} > (k+2)^{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) > G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) > G(n)$ eşitsizliği tüm $n \geq 3$ doğal sayıları için doğrudur.
(b) $(2.2)! < 2^{2.2}(2!)^2$, yani $4! < 8.4$ olduğundan $D(2) < G(2)$olur. Farzedelim ki, $D(n) < G(n)$ eşitsizliği $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$$

geçerlidir. $n = k+1$ için bu eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(2k+2)! = (2k)!(2k+1)(2k+2) < 2^{2k}(k!)^2(2k+1)(2k+2) < \\ < 2^{2k}(k!)^2(2k+2)^2 = 2^{2(k+1)}((k+1)!)^2\end{aligned}$$

olur. Bu ise, $D(k+1) < G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) < G(n)$ eşitsizliği tüm $n \geq 2$ doğal sayıları için doğrudur.
(c) $2! \geq [(1+1)!]^1$ olduğundan $D(1) \geq G(1)$olur. Farzedelim ki, $D(n) \geq G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$2!.4!\ldots(2k)! \geq [(k+1)!]^k$$

geçerlidir. $n = k+1$ için de bu eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}2!.4!\ldots(2k)!(2k+2)! &\geq [(k+1)!]^k(2k+2)! \\ &= \frac{[(k+2)!]^k}{(k+2)^k}(2k+2)! \\ &= [(k+2)!]^{k+1}.\frac{k+3}{k+2}.\frac{k+4}{k+2}\cdots\frac{2k+2}{k+2} \\ &> [(k+2)!]^{k+1}\end{aligned}$$

olur. Bu ise, $D(k+1) \geq G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) \geq G(n)$ eşitsizliği tüm $n = k$ doğal sayıları için doğrudur.
(d) $D(n) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1}$ olmak üzere verilen eşitsizlik $D(n) > 1$ biçiminde yazılabilir. $n = 1$ için

$$D(1) = \sum_{k=1}^{2+1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$$

olduğu açıktır. Farzedelim ki, $D(n) > 1$, $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

geçerlidir. Her iki tarafa

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$$

ifadesini ilave edersek

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}&\\ > 1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}&\\ = 1 + \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > 1&\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) > 1$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) > 1$ eşitsizliği tüm $n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için doğrudur.

(e) $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olduğundan, $D(1) < G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n) < G(n)$ eşitsizliği $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

geçerlidir. $n = k+1$ için de bu eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2k-1}{2k}.\frac{2k+1}{2k+2} &< \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.\frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.\sqrt{\frac{4k^2+8k+3}{4k^2+8k+4}} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}\end{aligned}$$

Bu ise, $D(k+1) < G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) < G(n)$ eşitsizliği tüm $n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için doğrudur. $\diamond$

(10) Aynı işratli $x_i > -1,\ i = 1, 2, \ldots, n$ sayıları ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ile verilen Bernoulli eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $D(n) = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)$ ve $G(n) = 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,\ n \in \mathbb{N}$ olsun. $D(1) = 1 + x_1 = G(1)$ olduğu aşikardır. Farzedelim ki, $D(n) \geq G(n)$ eşitsizliği $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

geçerlidir. Her iki tarafı $1 + x_{k+1} \geq 0$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(1 + x_{k+1}) \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \\ &+ (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{k+1} \\ &\geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1},\end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü $x_i,\ i = 1, 2, \ldots$ sayıları aynı işaretli olduğundan

$$(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{k+1} \geq 0$$

dır. Böylece, $D(k) \geq G(k)$ ise, $D(k+1) \geq G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) \geq G(n)$ eşitsizliği tüm $n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için doğrudur. $\diamond$

(11) $n \in \mathbb{N}$ için $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ sayısının 19 ile bölünebileceğini gösteriniz.

Çözüm: $5.2^{3-2} + 3^{3-1} = 19$ sayısının 19 ile bölüneceği aşikardır. Farzedelim ki, $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ sayısı $n = k$ için 19 ile bölünür. Bu durumda, $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere $5.2^{3k-2} + 3^{3k-1} = 19p$ geçerlidir. $5.2^{3k+1} + 3^{3k+2}$ sayısının 19 ile bölüneceğini gösterelim.

$$\begin{aligned}5.2^{3k+1} + 3^{3k+2} &= 8.5.2^{3k-2} + 27.3^{3k-1} \\ &= 8(5.2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19.3^{3k-1} \\ &= 8.19p + 19.3^{3k-1}\end{aligned}$$

olduğundan ve $8.19p + 19.3^{3k-1}$ sayısı 19 ile bölündüğünden $5.2^{3k+1} + 3^{3k+2}$ sayısı19 ile bölünür. Matematik indüksiyon prensibine göre, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ sayısı19 ile bölününür. $\diamond$

(12) $a_0 = 2,\ a_1 = \dfrac{5}{2}$ ve $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ için $a_n = \dfrac{5}{2} a_{n-1} - a_{n-2}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n = 2^n + 2^{-n}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a_0 = 2 = 2^0 + 2^0 = 2,\ a_1 = \dfrac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1}$ olduğu açıktır. Farzedelim ki, $a_n = 2^n + 2^{-n}$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$a_{k-1} = 2^{k-1} + 2^{-k+1} \text{ ve } \ a_k = 2^k + 2^{-k}$$

geçerlidir. $a_{k+1} = 2^{k+1} + 2^{-k-1}$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{5}{2} a_k - a_{k-1} \\ &= \frac{5}{2}(2^k + 2^{-k}) - (2^{k-1} + 2^{-k+1}) \\ &= (2 + 2^{-1})(2^k + 2^{-k}) - (2^{k-1} + 2^{-k+1}) \\ &= 2^{k+1} + 2^{-k+1} + 2^{k-1} + 2^{-k-1} - 2^{k-1} - 2^{-k+1} \\ &= 2^{k+1} + 2^{-k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $a_{k+1} = 2^{k+1} + 2^{-k-1}$ olduğunu gösterir. Demek ki, $a_n = 2^n + 2^{-n}$ eşitliği tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayıları için doğrudur. $\diamond$

1.12 Ek Problemler

(13) $\mathbb{N}$ kümesinde (d), (f) ve (h) özelliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

(14) $\mathbb{Z}$ kümesinde (a), (c) ve (d) özelliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

(15) $\sqrt{3},\ \sqrt{6},\ \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3}$ ve $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sayılarının irrasyonel olduklarını gösteriniz.

(16) $\sqrt{ab}$ irrasyonel sayı ise p ve q iki rasyonel sayı olmak üzere $p\sqrt{a}+q\sqrt{b}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

(17) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ sayısının bir cebirsel sayı olduğunu gösteriniz.

(18) Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu Matematik İndüksiyon metodu ile gösteriniz.

(a) $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1}{2}$;

(b) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$;

(c) $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+[a(n-1)d] = \dfrac{1}{2}[2a(n-1)d], \quad a,d \in \mathbb{R}$;

(d) $1.2+2.5+\ldots+n(3n-1) = n^2(n+1)$;

(e) $1.2+2.3+\ldots+(n-1)n = \dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)$;

(f) $2.1+3.2+\ldots+(n+1)2^{n-1} = n2^n$;

(g) $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(h) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)n^2 = \dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$;

(i) $1.2^2+2.3^2+\ldots+(n-1)n^2 = \dfrac{1}{12}n(n^2-1)(3n+2)$;

(j) $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$;

(k) $1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

(l) $1^4+2^4+\ldots+n^4 = \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$;

(m) $1^5+2^5+\ldots+n^5 = \dfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$;

(n) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$;

(o) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$;

(p) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

(q) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1}(n+2)(n+3);$

(r) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)\ldots(n+m-1)}\right], \ m \in \mathbb{N};$

(s) $\sum_{k=0}^{n} \sin(\alpha + kx) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin(\alpha + \frac{n}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2m\pi, \ m \in \mathbb{Z};$

(t) $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + kx) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cos(\alpha + \frac{n}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2m\pi, \ m \in \mathbb{Z};$

(u) $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8} + \ldots + \arctan\frac{1}{2n^2} = \arctan\frac{n}{n+1};$

(v) $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})\ldots(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2};$

(w) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n};$

(x) $1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n-kez} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81};$

(y) $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}\cot x, \quad x \neq m\pi, \ m \in \mathbb{Z}.$

(19) Matematik İndüksiyon yöntemi ile aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n;$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(n!)^2 > n^n;$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $(n!)^2 < \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n;$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(n!)^4 < n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{3n};$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n};$

(f) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2};$

(g) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2$;

(h) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{n}$;

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2n}$;

(j) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$;

(k) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n$;

(l) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})^n < 2^n$;

(m) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} > 1$;

(n) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ a > 1$ için $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$;

(o) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ a, b > 0$ için $|\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}| < \sqrt[n]{|a-b|}$;

(p) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ a, b \geq 0$ için $a^n + b^n| \leq (a+b)^n$;

(q) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ a, b \geq 0$ için $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$;

(r) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$;

(s) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e^{1-\frac{1}{n}}$;

(t) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

(20) $a_1, \ldots, a_n$ ve $b_1, \ldots, b_n$ keyfi reel sayılar olmak üzere

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)$$

şeklinde verilen Cauchy-Schwartz eşitsizliğini ispatlayınız.

(21) $a_i \in \mathbb{R}_+,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ve

$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \qquad \text{(Harmonik Ortalama)},$$

$$\eta_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \qquad \text{(Geometrik Ortalama)},$$

$$\xi_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad \text{(Aritmetik Ortalama)}$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \leq \eta_n \leq \xi_n$ eşitsizliğinin ve ayrıca,

$$(\gamma_n = \eta_n = \xi_n) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = \ldots = x_n)$$

ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

(22) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

(a) $n(2n^2 - 3n + 1)$ sayısının 6 ile;

(b) $n^5 - n$ sayısının 5 ile;

(c) $12^n + 10$ sayısının 11 ile;

(d) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ sayısının 133 ile;

(e) $3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ sayısının 17 ile;

(f) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ sayısının 11 ile;

(g) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ sayısının 11 ile;

kalansız bölündüğünü gösteriniz.

(23) $a_0 = 2,\ a_1 = 3$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = 2^n + 1$ olduğunu gösteriniz.

(24) $a_1 = 2$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = 3a_{n-1} + 1$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{1}{2}[5.3^{n-1} - 1]$ olduğunu gösteriniz.

(25) $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \frac{2a_2 + a_1}{3} - (-1)^{n-1} . \frac{a_2 - a_1}{3.2^{n-1}}$$

olduğunu gösteriniz. a_n sayılarına Fibonacci sayıları denir.

(26) $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = (2^{n-1} - 1)a_2 - (2^{n-1} - 2)a_1$$

olduğunu gösteriniz.

(27) $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = (2-n)a_1 + (n-1)a_2 + 1 - \frac{3}{2}n + \frac{n^2}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

(28) $a_1 = a_2 = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ için $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \right)$$

olduğunu gösteriniz.

(29) $a_1 = a,\ a_2 = b$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ için $a_n = a_{n-1} - \dfrac{1}{4}a_{n-2}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = (2a - 2b + (2b-a)n)2^{1-n}$$

olduğunu gösteriniz.

(30) n elemanlı bir kümenin alt kümeleri sayısının 2^n olduğunu gösteriniz.

(31) Rasyonel katsayılı polinom denklemler kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

(32) Cebirsel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

1.13 Reel Sayılar Kümesinin Tamlığı ile İlgili Esas Prensipler

Reel sayı dizileri konusu Bölüm 2 de daha detaylı incelenecektir. Fakat, $\mathbb{R}$ içindeki kümelerin *IV* Tamlık aksiyomu ile ilgili ele alacağımız özellikleri